



TITLE:

伴流における低周波モードの成長 (液体中の非線形波動の数理的側面)

AUTHOR(S):

前川, 博

CITATION:

前川, 博. 伴流における低周波モードの成長(液体中の非線形波動の数理的側面). 数理解析研究所講究録 1991, 740: 179-190

ISSUE DATE:

1991-01

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/102099>

RIGHT:

伴流における低周波モードの成長

鹿児島大学 工学部 前川 博 (Hiroshi Maekawa)

1. まえがき

伴流においては基本波成分の減衰の後の低周波モードの成長は遷移後期の乱雑化過程の特性と深い関係がある。(佐藤、斎藤(1989)) 本研究の目的は、低周波モードの成長と伴流構造の関係を調べ、二次元乱流における自己相似則の破れについて検討する。

実験室で得られる欠損の小さな伴流では Wignanski et al.(1986) の示すように自己相似則は比較的よく成立っている。この伴流の構造は三次元である。しかしながら、二次元乱流では、Aref & Siggia(1982) が疑問をなげかけたように自己相似則は破れている可能性がある。

設定した問題は図 1 に示すように速度欠損の小さな Far Wake に大きな影響を与える低周波成分の起源の状態とその後の空間発展の様子を調べることである。それに加え、渦構造の変化と統計量を調べ、二次元と三次元伴流(実験)の自己相似則の成立条件を考察するものである。

2. 問題の数学的定式方法 (Maekawa et. al.(1990))

本研究では、Orr-Sommerfeld 方程式を基礎とした線形安定論で与えられる固有関数とその固有値を攪乱モードとして使用する。

伴流の参照速度分布とレイノルズ数に対する Orr-Sommerfeld 方程式を解いて各周波数モードの成長速度を計算する。成長率のもっとも大きいモードが基本波である。また、 $1/2$ や $1/4$ の周波数のモードは低調波 (Subharmonics) として固有関数を求めて使用する。

2.1 基礎方程式 非圧縮性の非定常ナビエーストークス方程式

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \epsilon_{ijk} u_j \omega_k - \frac{\partial P}{\partial x_i} + Re^{-1} \nabla^2 u_i \quad (2)$$

と連続の式

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3)$$

が解かれる。ただし、本研究ではレイノルズ数は伴流速度分布の半値幅を代表長さとしている。

境界条件は流入条件は、層流伴流では速度分布としてガウス分布を与える。また、流出境界条件は時間依存対流条件を与える。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + U_a \frac{\partial u_i}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

大きな計算領域をとって流出面で速度欠損がかなり小さい伴流で

は、流出境界付近でも大きな困難はなく計算できる。うず構造がほとんど変形を受けずこの流出面を通り抜ける。

速度成分は参照速度分布と計算成分とに分けられる。すなわち、

$$u = u_c + U(y), v = v_c \quad (5)$$

である。計算成分について y 方向に三角級数に展開して擬スペクトル法を使って計算を行なう。

初期条件は x 方向に一様に流入面の速度分布を与える。ただし、計算流れ場においては、どんな統計解析をするデータもこの初期条件を完全に消去した後行なう。

2.2 計算アルゴリズム 空間発展問題の直接シミュレーションでは、 x 方向に擬スペクトル法を使えないので、この方向には中心差分法を用いる。また、主要な勾配方向である y 方向は境界の影響をできるだけ避けるため写像変換をおこなう。したがって、 x 方向に有限で y 方向に $y \rightarrow \pm\infty$ の計算領域が与えられる。ここで、運動方程式から圧力項を消去したアルゴリズムを使う。

二次元の運動方程式に2回 curl を取ると、圧力項は消去され、主流方向の流速について4階の微分方程式が得られる。

$$\frac{\partial \nabla^2 u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial H_1}{\partial y} - \frac{\partial H_2}{\partial x} \right) + Re^{-1} \nabla^4 u \quad (8)$$

ただし、 $H_i (i=1,2)$ は対流項を表す。式(8)は三次の Runge-Kutta 法

による時間にたいして陽に積分を行なうスキームによって積分される。自由せん断流のように構造が対流的に下流へ流れる場合には陽のスキームで良い結果が得られるようである。Laplacian が時間微分項に含まれているので Runge-Kutta スキームのそれぞれのサブステップで Poisson 方程式を解かなければならない。いっぽう、流速 u は連続の式から直接解くことができる。アルゴリズムは \cot 写像を用いた *Fourier*変換法に基礎をおいている。いっぽう、 x 方向の微分は高次の中心差分 *Padé*形式を使用する。これは、波動方程式をこの中心差分で解くと、スペクトル展開の中間成分まででは 6 次の精度が保証され、流体中を伝播する波速度が比較的高波数成分まで正しく表現できている。アルゴリズムには数値粘性が入らず、遷移流れや乱流の詳細を研究するための直接シミュレーションには必須のことであると考ええる。レイノルズ数が 600 で x 方向 ($0 < x < 400$) に 1536 のグリッド点、 y 方向に 128 グリッド点が使われた。

3. 計算結果および考察

攪乱を導入した計算をする前に、いっさい攪乱を導入しない場合について調べると、流れ場はレイノルズ数が 600 まで完全に層流状態であり速度欠損が小さい場合は、解析解であるガウス分布に極めて良く一致する。したがって、計算領域に発生する攪乱は、本計算における境界条件、アルゴリズムやコーディングによ

るものではないことが証明される。すなわち、この問題における乱流の現れかたは、定常解の攪乱に対する不安定の問題となっている。自然遷移の実験 (Sato & Kuriki (1961)) では、このレイノルズ数では層流状態は保たれない。

そこで、攪乱を導入するわけであるが、基本波成分だけを導入するとききれいなカルマン渦ができるが、計算領域のなかでは基本波とその高調波だけ観測され、実験のように低周波が観測されるわけではない。計算では”自然”にノイズが混入してくることはない。厳密に言えば、流れ方向に有限の計算領域のなかに計算上有効な大きさ以上の低周波成分が観測されない。また、計算領域の中には絶対不安定な領域は含まれていない。すなわち、シミュレーションしているレイノルズ数においては、流入面の速度欠損は大きくない。したがって、攪乱が上流に伝播することはない。

3.1 低周波モードの起源 流入面に低周波成分を含む攪乱を導入してみることにする。ただし、その大きさは、非常に小さいものである(主流にたいして 0.001%の振幅)。Case 1 として Broadband noise を導入した場合の低周波成分の様子を調べる。Case 2 は Broadband noise 以外に強い基本波を導入した場合である。基本波が Carrier の役割を示すとき、低周波成分はどのように分布するか調べるためである。図 2 は Case 1 の基本波成分と低周波

成分の強さを示す。

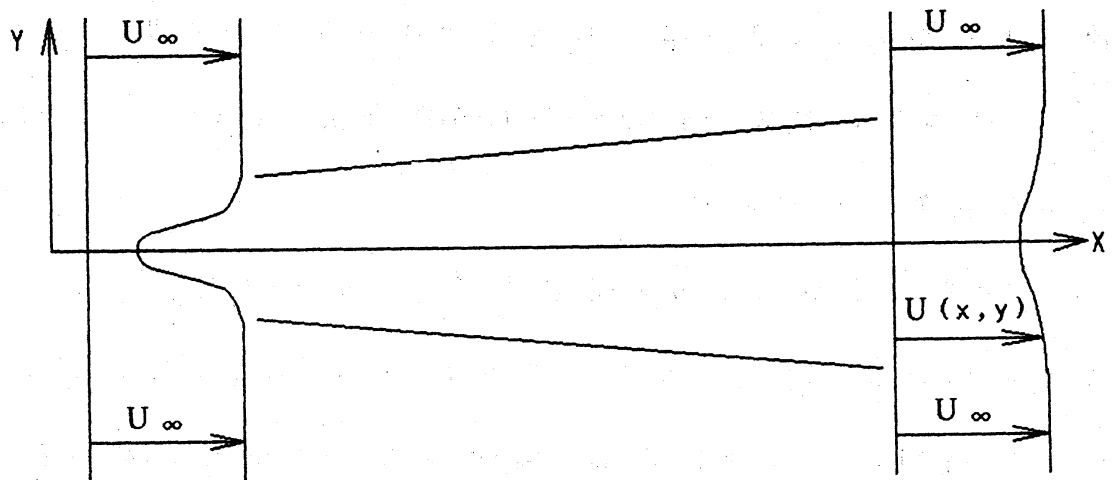


図 1 問題と座標系

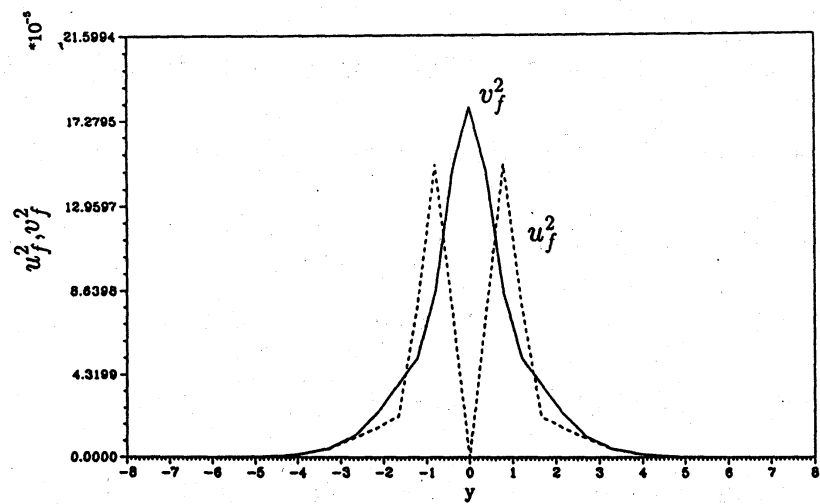


図 2 (a) 基本波成分の分布 (x=50)

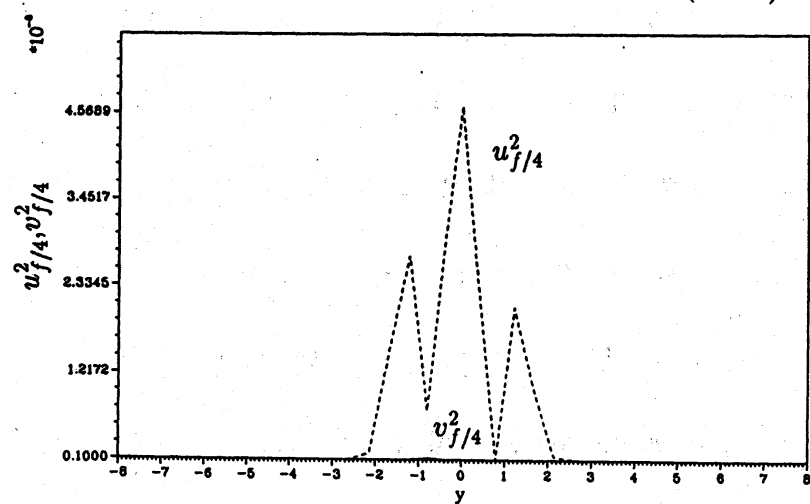


図 2 (b) 第 2 低調波成分の分布 (x=50)

基本波やその第2高調波の u 成分は実験結果 (Sato & Onda (1970)) とよく一致している。第2低調波の分布は u 成分が支配的で伴流中心で極大である。より下流でのエネルギースペクトルを観察すると第1低調波付近に持つエネルギーは小さく、むしろ第2低調波付近とそれ以下の周波数成分の成長が著しい。したがって、低周波モードの起源はこの事実から、伴流中心付近にあるように見える。

いっぽう、Case 2 では、基本波成分は指数的に増加し他のモードの成長を抑制している (Sato & Saito (1975))。しかしながら、さきに述べたように成長した基本波成分もカルマン渦列が形成された後は減衰する。そして低周波成分がゆっくり成長しはじめる。図3はこの場合の、低周波成分の分布を示すが、やはり伴流中心で極大値を示している。この2つの場合から、伴流中心付近での u 成分の成長が低周波成分の起源を示しているように見える。

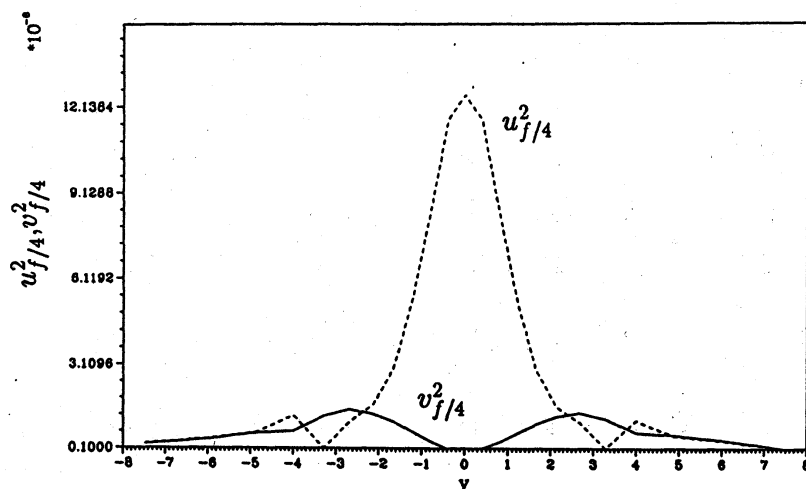


図 3 第2低調波成分の分布 ($x=50$)

しかしながら、ラインスペクトルのみ観測される場合と、上記の2つの場合の相違は、上記の場合には成長した基本波のまわりの側帯波成分が存在していることである。実験的研究で示されているように、基本波付近の成分の差成分の発生のメカニズムが低周波の成長を促したと思われる。

3.1 低周波モードの下流での成長 図4は、Case 1における下流 ($x=150$) での第2低調波成分の分布の様子を示す。 u 成分のエネルギーの大きさは基本波成分の半分程度である。 v 成分はようやく成長しはじめているが、 u 成分の分布は伴流中心に対する分布の対称性の崩れかたが明確になってきている。すなわち、低周波成分もその大きさを増すにつれて相互作用が顕著になりつつある。渦構造としてはまだカルマン渦列の構造をもっている。

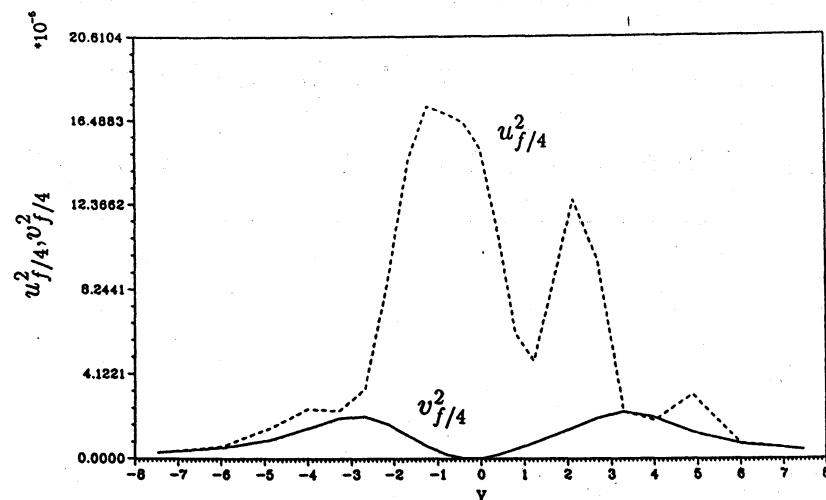


図 4 第2低調波成分の分布 ($x=150$)

いっぽう、Case 1 の攪乱の強さを強くすると、主流の1%とすると、基本波のまわりの側帯波成分の相互作用は活発になり低周波成

分の成長は著しくなる。図5は、レイノルズ数300における結果をしめす。 y 方向の位置は $y=2.2$ で、基本波の減衰の後の低調波成分の y 方向分布において極大値付近に対応している。第一低調波成分より第二低調波成分の成長が顕著であることがわかる。

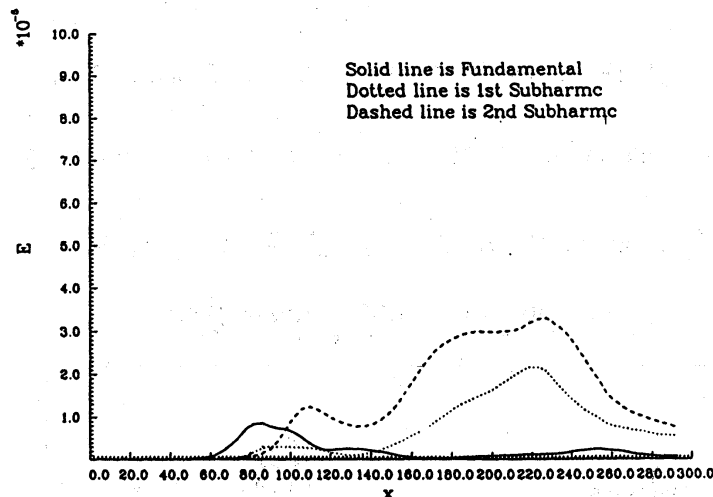


図 5 基本波、低調波成分の x 方向分布

3.3 二次元伴流の自己相似則の破れ この時の渦構造の一例は図6に示す。また図7は速度変動成分 u^2 の x 方向の分布を示す。平均時間は500無次元時間である。 $x=250$ より下流ではエネルギースペクトルは卓越したスペクトルが存在しない連続スペクトルを示す。しかしながら、 u^2 の分布は対称性がくずれ、また各 x 位置の半値幅と伴流中心速度を使って自己相似性を調べると相似性が保たれていないことがわかる。また、渦構造をみても渦の合体が起こる様子は偶然的にみえ、ある下流付近でのみ合体が起こるわけではない。さらに下流でも合体が起こりつづけているように見える。しかしながら、Wignanski et al.(1986) や Taneda(1959)

の実験で見られるようなカルマン渦列的な大規模構造の再現が下流で観測されることはない。渦構造は下流に行けば、さらに上流と異なる構造に変化してゆくように見え、エネルギースペクトルはすでに連続スペクトルを示すが、構造的には一意的な無秩序状態は容易には得られなさそうである。この計算ではすでに $2Mwords$ を越え、容易な計算ではなくなりつつある。さらに x 方向に計算領域を2倍にすることは容易ではない。

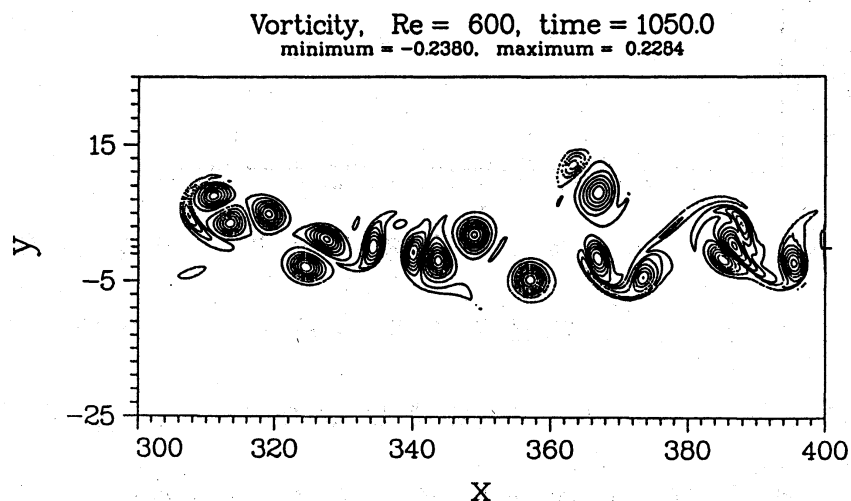


図 6 渦構造

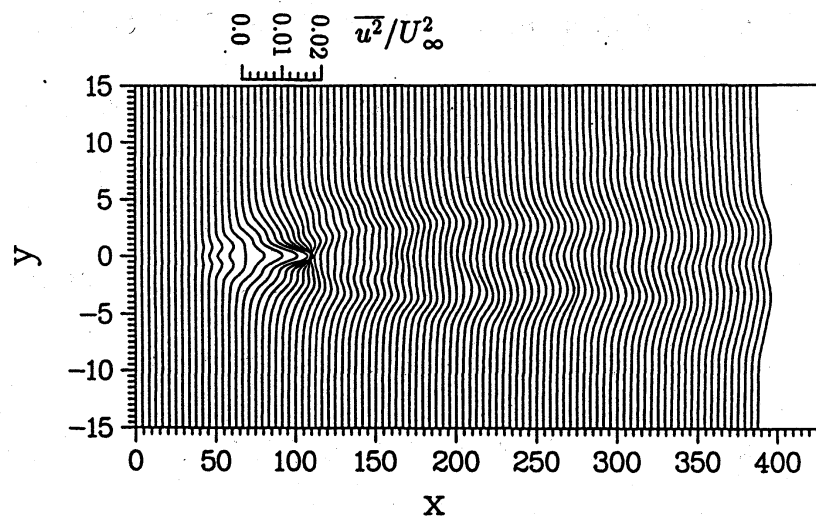


図 7 速度変動成分の分布

4. まとめ

二次元伴流の中で基本波モードが成長し減衰したあと、低周波モードが成長してくるが、その起源は基本波周波数の周辺モードの相互作用によって、伴流中心に強くあらわれ、実験結果と一致する。

基本波の成長は規則的なカルマン渦列をつくり、反対称成分が支配的でありその空間分布は規則的であるが、低周波モードの成長によって規則的な構造ができるわけではなく、下流では低周波モードの分布は規則的な形を示さない。

渦構造は下流で変化しつづけ、二次元乱流では大規模な規則性が再現するようには見えない。

参考文献

- Aref, H., and Siggia, E. D. 1981 Evolution and breakdown of a vortex in two dimensions. *J. Fluid Mech.* 109, 435-463.
- Maekawa H., Mansour N. N., and Buell C. J. Instability mode interaction in a spatially developing plane wake. accepted in *J. Fluid Mech.*
- Sato, H., & Kuriki, K. 1961 The mechanism of transition in the wake of a thin flat plate placed parallel to a uniform flow. *J. Fluid Mech.* 11, 321-352.
- Sato H. & Onda Y. 1970 Detailed measurements in the transition region of a two-dimensional wake. Inst. Space & Aero. Sci., Univ. Tokyo, report 453, 317-377.

Sato H. & Saito H. 1975 Fine-structure of energy spectra of velocity fluctuations in the transition region of a two dimensional wake. *J. Fluid Mech.*, **67**, 539-559.

佐藤 斎藤 1989 二次元伴流の層流乱流遷移における乱雑化過程。ながれ **8**, 132-139.

Taneda S. 1959 Downstream development of the wakes behind cylinders. *J. Phys. Soc. Japan*, **14**, 843-848.

Wyganski I., Chanpagne F., & Marasli B. 1986 On the large-scale structures in two-dimensional, small-deficit, turbulent wakes. *J. Fluid Mech.* **168**, 31-71.